代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.228-240

Semi-stable sheaves の有界性について.

京大理
丸山正樹

Semi-stable (又は, stable) sheaves の moduli の構成に関して，残っている問題で最も重要なものは Semi-stable sheaves の有界性であろう。この小論ではこの問題を説明し，どこまで解決しているかを述べる。

Y を代数的閉体 k 上の非特異，射影的代数多様体，$\mathcal{O}_Y(1)$ をその上の ample 可逆層とする。

<u>定義 1.</u> Y 上の連接層 E が stable (又は，semi-stable) であるとは，次の (i), (ii) が成立する時に言う。

(i) E は torsion free ($\neq 0$),

(ii) 任意の連接部分層 F ($\neq 0, \subsetneq E$) について，

$$\chi(F(m))/r(F) = P_F(m) < P_E(m) = \chi(E(m))/r(E),\ \forall m \gg 0,$$

(又は，$\leqq$)

ここで，Y 上の連接層 G について，$\chi(G(m)) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, G \otimes \mathcal{O}_X(m))$, $r(G) =$ Y の generic point での G の rank.

S を universally Japanese (= pseudo-geometric) ring Λ 上有限生成な scheme とする。 $f: X \longrightarrow S$ が smooth, projective, geometrically integral な morphism, $\mathcal{O}_X(1)$ が f-ample な可逆層とする。 (Sch/S) を locally noetherian S-schemes の category とする。 numerical polynomial $H(x)$ と, $T \in (Sch/S)$ について,

$\Sigma^H_{X/S}(T) = \{E \mid T$-flat な $X \times_S T$ 上の連接層で, T の任意の geometric point t について, $E_t = E \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ は $\mathcal{O}_{X_t}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(t)$ に関して stable かつ $\chi(E_t(m)) = H(m)\} / \sim$

$\bar{\Sigma}^H_{X/S}(T) = \{E \mid$ 上の条件の内 stable を semi-stable に変えたもの$\} / \sim$.

ここで, $E_1 \sim E_2 \Longleftrightarrow {}^{\exists}L$; T 上の可逆層 s.t. $E_1 \cong E_2 \otimes_{\mathcal{O}_T} L$.

明らかに, $\Sigma^H_{X/S}$, $\bar{\Sigma}^H_{X/S}$ は (Sch/S) から $(Sets)$ への contravariant functor になる。

<u>定理 1.</u> $\bar{\Sigma}^H_{X/S}$ は (S 上) locally of finite type かつ separated な coarse moduli $M_{X/S}(H)$ をもつ。 $M_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\Leftrightarrow$ $M_{X/S}(H)$: quasi-projective $/S$.

次に, 射影多様体 Y 上の semi-stable sheaf E を考える。

命題 1. E を Y 上の semi-stable sheaf とする。

(i) E には次の性質 (a), (b) を持つ filtration $0=E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_\alpha = E$ が入る; (a) $P_{E_i/E_{i-1}}(m) = P_E(m)$, $1 \leq i \leq \alpha$, (b) 各 E_i/E_{i-1} は stable.

(ii) (i) の性質 (a), (b) を持つ filtration $0=E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_\beta = E$ がもう1つあったとすると, $\alpha=\beta$ で $(1, 2, \ldots, \alpha)$ の置換 σ が存在して, $E'_i/E'_{i-1} \cong E_{\sigma(i)}/E_{\sigma(i)-1}$.

上の命題により, $gr(E) = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} E_i/E_{i-1}$ は (同型を除いて) 一意的に決まる。

定義 2. semi-stable sheaves E_1 と E_2 が S-equivalent $\Leftrightarrow gr(E_1) \cong gr(E_2)$. これを $E_1 \underset{S}{\simeq} E_2$ で表わす。

注意. E_1 と E_2 のうち一方が stable ならば,

$$E_1 \underset{S}{\simeq} E_2 \Leftrightarrow E_1 \cong E_2.$$

定理 2. 次の性質を持つ S-scheme $\overline{M}_{X/S}(H)$ が存在する。

(i) $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 locally of finite type かつ separated.

(ii) functor の射 $\varphi : \overline{\Sigma}^H_{X/S} \longrightarrow h_{\overline{M}_{X/S}(H)} = Hom_S(*, \overline{M}_{X/S}(H))$ があって, S-scheme N について, functor の射 ψ:

$\overline{\overline{\Sigma}}^H_{X/S} \to h_N$があれば、射 $\psi : \overline{M}_{X/S}(H) \to N$ で、$h(\psi)\varphi = \Psi$ となるものが一意的に存在する。

(iii) S の任意の geometric point s について、$\varphi(k(s))$: $\overline{\overline{\Sigma}}^H_{X/S}(\mathrm{Spec}\, k(s)) \to \overline{M}_{X/S}(k(s))$ は surjective で、$\varphi(k(s))(E_1) = \varphi(k(s))(E_2) \Leftrightarrow E_1 \underset{S}{\approx} E_2$.

(iv) 自然な射 $M_{X/S}(H) \to \overline{M}_{X/S}(H)$ は open immersion.

(v) $\overline{M}_{X/S}(H)$ は specialization で閉じている。しかも、$\overline{M}_{X/S}(H)$が quasi-compact $\Leftrightarrow$ $\overline{M}_{X/S}(H)$; projective$/S$.

さて、問題は上の(v)に関してで、

<u>問題</u> $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 projective か？ すなわち、$\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上有限生成か？

この問題を追求するために 2, 3 の概念を導入しよう

<u>定義 3</u> $f : X \to S$ を noetherian scheme の間の projective morphism とする。K_1, K_2 を体として、S の K_i-valued point が与えられたとする。X_{K_i}上の連接層 E_i について、E_1 と E_2 が equivalent ($E_1 \approx E_2$) $\Leftrightarrow$ 体 K と S 上の injection $K_i \subset K$ が与えられて、$E_1 \otimes_{K_1} K \cong E_2 \otimes_{K_2} K$ (X_K上の層として)。$f : X \to S$ の fibres 上の連接層

の equivalence classes のある集合を, "a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S" と言う.

<u>定義 4.</u> $f: X \to S$ を定義 3 と同じとする。
$\mathfrak{F}$: a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S.
この時, $\mathfrak{F}$ が有界 (bounded, limitée) $\Leftrightarrow$ $^\exists T$; S-scheme of finite type, $^\exists F$: coherent sheaf on $X \times_S T$ s.t. $\mathfrak{F} \subseteq \{F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \mid t \in T\}/\approx$.

<u>注意</u> "flatening stratification" を使えば, 上の定義で「F が T-flat」と仮定してよいことがわかる。

前にもどって, $f: X \to S$ が smooth, projective, geometrically integral, S が Λ 上有限生成とする。$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H) = \{E \mid E$ は X の geometric fibre/S 上の semi-stable sheaf で, $\chi(E(m)) = H(m)\}/\approx$ とおく。$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ が有界とすると, T と F がある。F は T-flat としておく。ところで, T の開集合 T_0 が存在して, 任意の代数閉体 k について, $T_0(k) = \{t \in T(k) \mid F_t = F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ は semi-stable$\}$ となる。T を T_0 で, F を $F|_{X \times_S T_0}$ でおきかえてよい。すると, $F \in \overline{\Sigma}^H_{X/S}(T)$. 定理 2 の (ii) により, $^\exists g: T \to \overline{M}_{X/S}(H)$, (iii) により g は surjective. T は quasi-compact だから, $\overline{M}_{X/S}(H)$ も quasi-compact. 従って, (V) により,

$\overline{M}_{X/S}(H)$ は projective/S. 故に,我々の問題は次の問題に帰着した(実は同値)。

<u>問題</u>　$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ は有界か?

<u>注意</u>　$\overline{\mathfrak{S}}_{X/S}(H)$ の定義の semi-stable という条件を,例えば indecomposable 置きかえると,有界でなくなる。我々の問題は自明ではない。

上の問題を考えるのには,(semi-)stable よりも次に定義する μ-(semi-)stable の方が扱いやすい。

Y, $\mathcal{O}_Y(1)$ を定義1と同じとし,E を Y 上の torsion free ($\neq 0$) な連接層とする。$d(E, \mathcal{O}_Y(1))$ を E の first Chern class $c_1(E)$ の $\mathcal{O}_Y(1)$ に関しての degree とし,

$$\mu(E) = d(E, \mathcal{O}_Y(1))/r(E)$$

と定義する。

<u>定義5</u>　Y 上の連接層 E が μ-stable (又は, μ-semi-stable) であるとは,次の条件を満足するときに言う。

(i)　E は torsion free ($\neq 0$),

(ii)　任意の連接部分層 F ($\neq 0$, $\subsetneqq E$) について,

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{又は}, \ \mu(F) \leqq \mu(E)).$$

Eがsemi-stableならばμ-stableなので，$\mathfrak{S}_{X/S}(H) \subseteq \mathfrak{S}''_{X/S}(H) = \{E \mid E$はXのgeometric fibre/S上のμ-semi-stable sheafで，$\chi(E(m)) = H(m)\}/\approx$．従って，$\mathfrak{S}''_{X/S}(H)$の有界性が言えれば充分である。

以下，Λはnoether環，Sはnoetherian Λ-schemeとする。$f: X \to S$は，smooth, projective, geometrically integralとし，f-ampleな可逆層$\mathcal{O}_X(1)$を固定する。

$f: X \to S$のgeometric fibre X_s上の連接層Eについて，整数$a_0(E), \dots, a_n(E)$が存在して，

$$\chi(E(m)) = \sum_i \dim H^i(X_s, E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X(m)) = \sum_{i=0}^{n} a_i(E) \binom{m+n-i}{n-i}。$$

Eについて，次の条件を考える。

(1) Eは$\mathcal{O}_{X_s}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$についてμ-semi-stable。

(2) $a_0(E) = rd$, $a_1(E) = a_1$, $a_i(E) \geq a_i$ $(2 \leq i \leq n)$，ここで，dはX_sの$\mathcal{O}_{X_s}(1)$に関しての次数。

(3) EはSerreの条件(S_2)を満足する。

(4) $a_0(E) = rd$, $a_1(E) = a_1$, $a_2(E) \geq a_2$，ここで，dは(2)と同じ。

(5) 次数nのnumerical polynomial $H(x)$について，$\chi(E(m)) = H(m)$かつ，$r(E) = r$。

上の条件のいくつかを満足するEのfamily

を定義しよう。

$$\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \cdots, a_n) = \{E \mid E \text{は条件(1),(2)を充たす}\}/\approx$$

$$\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2) = \{E \mid E \text{は条件(1),(3),(4)を充たす}\}/\approx$$

$$\Sigma''_{X/S}(n, r, H) = \{E \mid E \text{は条件(1),(5)を充たす}\}/\approx$$

有界性について，例えば次の命題が考えられる。

$B_{n,r}(\Lambda)$：Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma_{X/S}(n, r, a_1, \cdots, a_n)$ が有界。

$B'_{n,r}(\Lambda)$：Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma'_{X/S}(n, r, a_1, a_2)$ が有界。

$B''_{n,r}(\Lambda)$：Λ, n, r を固定する時，すべての $\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ が有界。

$\Sigma''_{X/S}(n, r, H)$ は（Λ についての条件が少し違うが）前の $\mathfrak{S}''_{X/S}(H)$ と同じものだから，我々問題は $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n, r, Λ について成立するか？ということになる。$B''_{n,r}(\Lambda)$ が成立する時，

「semi-stable sheaves の有界性が；次元 n，階数 r について，（Λ-scheme の category で）成立する。」

と言うことにする。

<u>命題 2</u>　$B_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$。　$B'_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$。

従って，semi-stable sheaves の有界性を示すには，$B'_{n,r}(\Lambda)$ を証明すれば良いことになる。大切なことは，次元についての帰納法を使う場合，$B''_{n,r}(\Lambda)$ を直接証明するよりも，$B'_{n,r}(\Lambda)$ を証明する方が容易に思われることである。

今までにわかっている結果をまとめると，

定理 3　(i)　$r=1,2$ の時，$B_{n,r}(\Lambda)$，$B'_{n,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n, Λ について成立する。

(ii)　$B_{2,r}(\Lambda)$，$B'_{2,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{2,r}(\Lambda)$ が，すべての r, Λ について成立する。

(iii)　$r=3,4$ かつ Λ が標数 0 の体の時，$B'_{n,r}(\Lambda)$ 従って $B''_{n,r}(\Lambda)$ が，すべての n について成立する。

この定理の証明は容易ではない。証明の途中で使われる結果で，それ自身興味のあるものを 2，3 あげよう。

定理 4.　Y を代数的閉体上の非特異，射影的代数多様体，$\mathcal{O}_Y(1)$ を Y 上の very ample 可逆層とする。L を $|\mathcal{O}_Y(1)|$ の very ample 部分一次系とする。

Y 上の（$\mathcal{O}_Y(1)$ に関して）μ-semi-stable sheaf E について，$r(E) < \dim Y$ とする．この時，L の空でない開集合 $U(E)$ が存在して，$\forall Z \in U(E)$，$E \otimes \mathcal{O}_Z$ は $\mathcal{O}_Z(1) = \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Z$ に関して μ-semi-stable.

注意　上の定理で $r(E) < \dim Y$ という条件は除けない。例えば，$\mathbb{P}_n$ と普通の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ をとったとき，接バンドル $T_{\mathbb{P}_n}$ を考える。勝手な $\mathbb{P}^{n-1} \cong H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)|$ について，完全列

$$0 \longrightarrow T_H \longrightarrow T_{\mathbb{P}_n}|_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(1) \longrightarrow 0$$

を得る．$c_1(T_H) = n \cdot H^2$，$c_1(T_{\mathbb{P}_n}|_H) = (n+1) H^2$．故に，

$$\mu(T_H) = n/(n-1) > (n+1)/n = \mu(T_{\mathbb{P}_n}|_H)$$

となり，$T_{\mathbb{P}_n}|_H$ は μ-semi-stable でない。

定理3の(i)は定理4の直接の系である。

Y を非特異，射影曲面とし，$\mathcal{O}_Y(1)$ を very ample 可逆層，$L \subseteq |\mathcal{O}_Y(1)|$ を very ample 部分一次系とする。E が Y 上の torsion free, 階数2の連接層とする。L の空でない開集合 $W(E)$ が存在して，$W(E)$ の勝手な元 C について，C は非特異，$E|_C$ は locally free となる。さて，$C \in W(E)$ について，

$$d(E,C)=\min\{d(E,\mathcal{O}_Y(1))-2\deg D \mid D: \text{line subbundle of } E|C\}$$

とおくと，$d(E,C)$ は整数である。

$$d(E)=\max\{d(E,C)\mid C\in W(E)\}$$

は有限であり，$W(E)$ の空でない開集合 $W'(E)$ があって，$d(E)=d(E,C)$, ${}^{\forall}C\in W'(E)$.

<u>定理5</u> Y, $\mathcal{O}_Y(1)$, L, Eは上と同様とする。さらに，基礎体の標数は0とし，Eは μ-semi-stable とする。この時，

$$d(E)\geq -C^2,\quad C\in L.$$

<u>注意</u> 上の定理で"標数0"という条件は除けない。例えば $Y=\mathbb{P}_2$, $\mathcal{O}_Y(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$, $L=|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|$, $E=T_{\mathbb{P}_2}^{(p^n)}$ (p=標数) とすれば，$d(E)=-p^n$ となる。

定理5の証明は，W. Barth が $\mathbb{P}_n$ 上の階数2の stable bundle を調べるのに使った方法 (Math. Ann. 226 (1977) 125-150) を真似ればよい。この定理は，この場合定理4の様なことは成立しないが，一般の C について，$E|C$ が μ-semi-stable からあまり離れないことを意味する。定理3の(iii)の $n=3$ の場合は，定理4，5を使って証明される。$n=4$

の場合は，定理5の高い階数の場合への，ちょっとした一般化から出る。

定理5の様なことが一般の階数で成立すれば，$B'_{n,r}(\Lambda)$が，Λが標数0の体という仮定の下で証明できると思われる。

最後に文献であるが，定理1，2に述べたmoduliについては次のものがある。

M. Maruyama: Stable vector bundles on an algebraic surface, Nagoya Math. J., 58, 1975.

D. Gieseker: On moduli of vector bundles on an algebraic surface, Ann. of Math., 106, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ., 17, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ., 18, 1978.

有界性について基本的なものは，

S. Kleiman: Les théorèm de finitude pour le foncteur de Picard, Sem de Géométrie Algébrique de Bois Marie, 1966/67. Expose XIII, Lect. Note in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.

この小論の詳しい内容は次の論文にある。

H. Maruyama: Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks, submitted to Nagoya Math. J..